Fachschaft Mathematik: Einstieg in die Oberstufe für ehemalige Gemeinschaftsschüler

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit der Anmeldung zur Oberstufe am Gymnasium Brunsbüttel hast du vermutlich diese Zettel bekommen. Zunächst einmal: *Keine Panik!* Auch die Schülerinnen und Schüler, die bisher an dieser Schule waren und mit dir in die Oberstufe eintreten, sind nicht alle Mathe-Genies! Diese Zettel sollen dir nur die Möglichkeit geben, mit etwas Vorbereitung eventuelle Hürden schon vor dem ersten Schultag aus dem Weg zu schaffen.
Dein Mathematikunterricht der letzten Jahre war inhaltlich vermutlich dem an dieser Schule sehr ähnlich. Es gibt nur einige wenige Bereiche, die an einer Gemeinschaftsschule nicht in dem gleichen Umfang wie am Gymnasium unterrichtet worden sind, weil sie für den Mittleren Bildungsabschluss nicht von so großer Bedeutung sind. Hier bekommst du nun die Möglichkeit, dir einige Inhalte selbst zu erarbeiten. Um nicht ganz auf dich alleine gestellt zu sein, solltest du dir folgende Möglichkeiten der Hilfe vor Augen führen:

- Wenn du von anderen Schülern weißt, die auch an diese Schule wechseln wollen, wäre es doch hilfreich, wenn ihr diese Bögen zusammen bearbeitet. In Zweier- oder Dreiergruppen kann man sehr effektiv arbeiten und sich gegenseitig helfen.
- Wenn du vor Ende des Schuljahrs schon versuchst anzufangen, kannst du sicher deine Mathelehrerin/deinen Mathelehrer um Hilfe bitte, falls du nicht weiterkommst.
- Im Internet findet man oft Hilfe bei Lehrer Schmidt und Co.

Bei der Wiederholung von Inhalten der Klassenstufen 5-10 hilft folgendes Buch mit einer kurzen Wiederholung und sehr vielen Übungsaufgaben:
Helmut Postel: Aufgabensammlung zur Übung und Wiederholung
(Schroedel Verlag, ISBN 978-3507732216, ca. 18€)

Wenn du größeren Bedarf an einer Wiederholung des Unterrichtsstoffs der letzten Jahre hast, wäre die Anschaffung dieses Buchs hilfreich. Auch auf diesen Zetteln findest du immer wieder Hinweise auf dieses Buch.

Ein Hinweis noch zum Aufbau der Zettel: Das Wichtigste ist im Kapitel 1, im Kapitel 4 findet man nur Hinweise auf Inhalte, die noch im Unterricht folgen werden. Daher ist das Kapitel 4 nicht so wichtig.

1. Elementare Mathematik

Eine Bemerkung zuerst: **Fast alle Inhalte der Klassenstufen 1-10 sind für die Oberstufe von Bedeutung.**
Es gibt allerdings Fähigkeiten, ohne die ein Scheitern vorprogrammiert ist. Daher folgt hier eine Übersicht, was unbedingt wiederholt werden muss, wenn es nicht schon beherrscht wird. Neben Beispielaufgaben steht auch der Verweis auf die entsprechenden Seiten im erwähnten Buch von Helmut Postel.

Die folgenden Aufgaben stellen einen Selbsttest dar. Versuche, die Aufgaben mit Hilfe eines Taschenrechners zu lösen.

Überprüfungsaufgaben

1.a **Umformen von Termen** (siehe *Postel*, Kapitel 7, ab Seite 33)

Aufgabe 1 Löse die Klammern auf und fasse zusammen:

a) $5\cdot(2a+7b) + 10a\cdot(b-5) - (a+5)(b-2)$ b) $(2x-y)^2 + 4x^2 + y\cdot(3x+y)$

Aufgabe 2 Klammere aus: a) $3xy + 9x - 12xyz$ b) $8ab + 4b - 16ab$

1.b **Lösen von linearen Gleichungen** (siehe *Postel, Kapitel 8, ab Seite 42)*

Aufgabe 3 a) $8x + 7 - 2x = 37$ b) $-7x + 5\cdot(1+x) = 2$ c) $(x+5)^2 + 10 - x^2 = -15$

d) $(4x - 7)(-x + 8) = -(2x + 5)^2+28$

1.c **Lösen von quadratischen Gleichungen („p-q-Formel“**, *Postel S.67*)

Aufgabe 4 Bestimme alle Lösungen:

a) $x^2 + 8x + 7 = 0$ b) $x^2 - 10x + 25 = 0$ c) $4x^2 - 44x + 72 = 0$

d) $3x^2 - 1{,}5x + 9 = 0$ e) $(x+5)\cdot(x-1{,}7)=0$

1.d **Systeme linearer Gleichungen** (siehe *Postel, ab Seite 58*)

Aufgabe 5 Bestimme die Lösung der beiden Gleichungssysteme:

a) $7x + 3y = -6$
$-x - 2y = 15$

b) $9x +2y = 1$
$9x +4y = 11$

1.e **Vermischte Aufgaben**

Aufgabe 6 Auf einem Konto sind 5000€, der Zinssatz beträgt 2,5%. Berechne den Kontostand nach zwei Jahren.

Aufgabe 7 Berechne Flächeninhalt und Umfang eines Kreises mit dem Radius r=2m (ohne Formelsammlung!)

Aufgabe 8 Vereinfache so weit wie möglich: a) $\sqrt{4x^3}\cdot\sqrt{x^7}$ b) $(16x^8)^{1/4} + \sqrt[3]{27x^6}$

Insgesamt gibt es 19 Teilaufgaben. Die Lösungen findest du weiter hinten. Bis auf Rechenfehler und Flüchtigkeitsfehler solltest du alle Aufgaben lösen können. Hast du weniger als 15 Aufgaben richtig, solltest du in diesem Bereich dringend wiederholen!

2. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Eines der drei großen Themen der Oberstufe wird die Wahrscheinlichkeitsrechnung sein. Daher sollte dieser Bereich dringend wiederholt werden.

2.1 Begriffsklärung

Zunächst müssen folgende Begriffe geklärt (verstanden) werden:

- absolute Häufigkeit
- relative Häufigkeit
- Wahrscheinlichkeit
- Zufallsexperiment
- Laplace-Experiment

Kläre die Begriffe mit Hilfe von Videos auf youtube, falls dir die Definitionen nicht bekannt sind.

Beispiel: In der Fußball-Bundesligasaison 2008/2009 gab es in den Spielen insgesamt 77 Elfmeter. Davon wurden 59 Elfmeter verwandelt, 11 wurden von den Torhütern gehalten und der Rest ging neben das Tor bzw. an Pfosten oder Latte.

	absolute Häufigkeit	rel. Häufigkeit (1)	rel. Häufigkeit (2)
Tor	59	$\frac{59}{77}$	≈0,766 = 76,6%
Torwart hält	11	$\frac{1}{7}$	≈0,143 = 14,3%
daneben	7	$\frac{1}{11}$	≈0,091 = 9,1%

Man kann also die relative Häufigkeit als Bruch, Dezimalbruch oder als Prozentangabe angeben.

Um experimentell die **Wahrscheinlichkeit** für einen verwandelten Elfmeter zu bestimmen (die vermutlich etwa bei 75-80% liegt), müsste man eine viel größere Datenmenge betrachten, 77 Elfmeter reichen da nicht aus.
Oft kennt man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses relativ genau. Wirft man eine (nicht gebrauchte) Münze, sollte die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Zahl“ bei 0,5 oder 50% liegen. Bei einem perfekten Würfel liegt die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „1“ bei $^1/_6$.

Einen Vorgang nennt man **Zufallsexperiment**, wenn dabei mindestens zwei Ergebnisse möglich sind und es vor Ablauf des Vorgangs nicht sicher vorhersagbar ist, welches der möglichen Ergebnisse eintreten wird.
Zufallsexperimente wie die Münze oder der Würfel, bei dem alle möglichen Ereignisse gleich wahrscheinlich sind, nennt man **Laplace-Experiment**.
Der Elfmeter ist hingegen sicherlich kein Laplace-Experiment, da jeder Elfmeter noch von vielen anderen Dingen abhängt: Fitness des Schützen, Nerven des Schützen, Spielstand (bei 4:0 ist die Wahrscheinlichkeit höher als bei 0:0, weil ein Fehlschuss nicht so entscheidend wäre) usw. Das Experiment „Elfmeter“ ist also nicht immer mit der gleichen Wahrscheinlichkeit wiederholbar.

2.2 Baumdiagramme

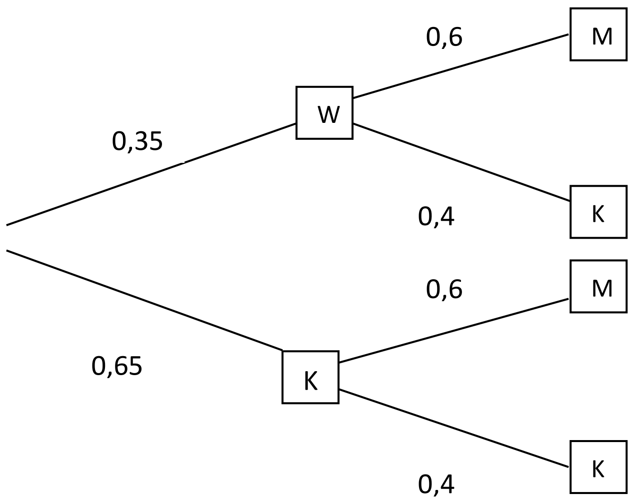
Oft möchte man nicht ein einzelnes Zufallsexperiment betrachten, sondern die Kombination aus zwei oder mehreres Experimenten.

Beispiel: In einer Geisterbahn werden die einzelnen Wagen nach kurzer Zeit durch einen Zufallsgenerator gesteuert mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,35 mit Wasser bespritzt. Wenig später fährt der Wagen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6 durch eine leichte Wolke aus Mehl.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft es einen Wagen bei beiden Überraschungen?

Lösung: Man kann sich leicht überlegen, dass ja nur 35% der Wagen Wasser abbekommen und man zur Lösung der Aufgabe nur wissen muss, wie viel 60% von 35% bzw. 60% von 0,35 sind. Also wird ein Wagen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,21 beide Überraschungen erleben.

Etwas schwerer dürfte die Frage zu beantworten sein, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Insassen eines Wagens genau eine der beiden Überraschungen erleben. Hierzu kann man folgenden Wahrscheinlichkeitsbaum benutzen.

(W: Wasser - M: Mehl - K: Kein Wasser/Mehl)



0,35 · 0,6 = 0,21 (wie oben berechnet!)

0,35 · 0,4 = 0,14

0,65 · 0,6 = 0,39

0,65 · 0,4 = 0,26

An die Äste des Baumes schreibt man die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse. Dazu muss man sich klarmachen, dass z.B. für Wahrscheinlichkeit für „kein Wasser" bei 1 - 0,35 = 0,65 liegt.

Mit Hilfe dieses Wahrscheinlichkeitsbaumes berechnet man nun die beiden Möglichkeiten „Wasser und kein Mehl" und „kein Wasser und Mehl" getrennt voneinander. Dazu sucht man sich den zugehören Pfad aus, also zunächst den mit W und danach K und multipliziert die Wahrscheinlichkeiten der Äste, die man benutzt hat. Die Wahrscheinlichkeit für „Wasser und kein Mehl" liegt also bei 0,35 · 0,4 = 0,14. Die Wahrscheinlichkeit für „kein Wasser und Mehl" berechnet man ebenso: 0,65 · 0,6 = 0,39. Nun muss man für die Bearbeitung unserer Frage noch die Wahrscheinlichkeiten für beide Möglichkeiten addieren.

Also lautet das Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Kunde der Geisterbahn genau eine der beiden Überraschungen erlebt, liegt bei 0,14 + 0,39 = 0,53.

3. Funktionen

3.1 Definition

Bisher wurde im Unterricht viel von „Funktionen“ gesprochen, aber was ist eine Funktion im mathematischen Sinne eigentlich? In mathematischer Sprache würde eine Definition so aussehen:

Gegeben seien die Mengen A und B. Eine Funktion f ist eine Zuordnung, die jedem Element der Menge A genau ein Element der Menge B zuordnet.

Dies muss zunächst einmal nichts mit Funktionsgraphen oder Berechnungen zu tun haben. Ein ganz einfaches Beispiel aus dem Alltag ist der Geburtstag. Wenn eine (beliebige) Gruppe von Menschen die Menge A und alle Tage des Jahres die Menge B bilden, wird jedem Element der Menge A (also jedem Menschen) genau ein Element der Menge B (ein Datum) zugeordnet.

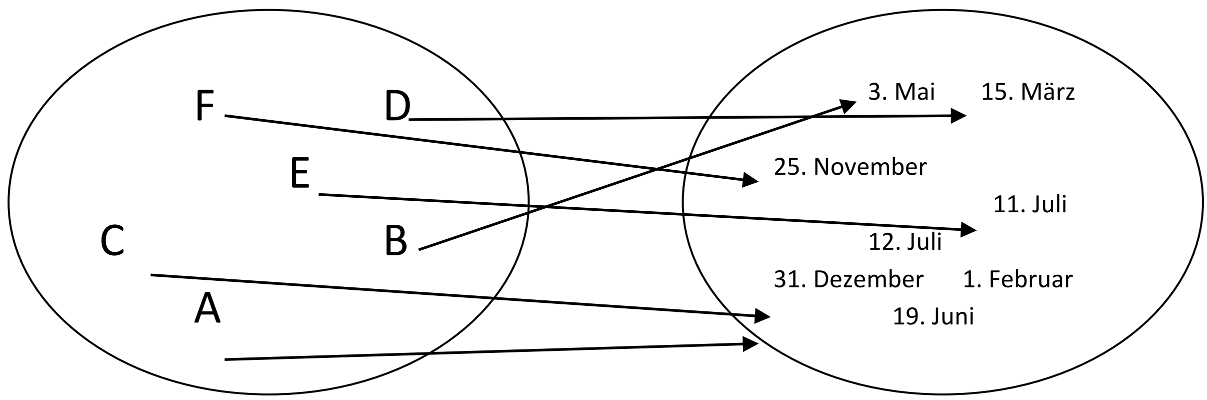
In einem Schaubild betrachten wir Anna, Bert, Clara, Dieter, Erna und Fritz:

Menge der Gruppe von Menschen (A)

Nur die Anfangsbuchstaben

Menge der Geburtsdaten (B)

Aus Gründen der Übersicht fehlen 358 Tage!



Jedes Element (jede Person) von A hat also <u>genau</u> ein Element von B (Geburtstag) zugeordnet bekommen. Bei einer Funktion ist es aber durchaus erlaubt, dass ein Element der Menge B keine Zuweisung bekommen hat. In unserem Beispiel hat am 19. Juni keiner der sechs Personen Geburtstag. Genau so ist es erlaubt, dass ein Element von B zwei oder mehr Zuweisungen bekommt. In unserem Beispiel haben Anna und Clara beide am 31. Dezember Geburtstag.

Die Menge A nennt man Definitionsmenge (auch Definitionsbereich), die Menge B Wertemenge.

3.2 Funktionen, Funktionstypen

Was hat die eben gelernte Definition nun mit den Zuordnungsvorschriften (z.B. $y = 3x+5$, $f(x)=x^2-76$ usw.) zu tun, mit denen im Mathematikunterricht gerechnet wurde? Die Antwort liegt in der Wahl der Definitions- bzw. Wertemenge. Beide sind, wenn nichts anderes festgelegt oder mathematisch notwendig ist, die Menge der Reellen Zahlen. Mit der Zuordnung $y=3x+5$ wird also jeder reellen Zahl eine andere reelle Zahl zugeordnet (also wird der 1 die 8 zugeordnet usw.). Um einer Funktion einen Namen geben zu können, wird eine andere Schreibweise zukünftig bevorzugt. Nennen wir die Funktion f, so schreibt man: $f(x) = 3x+5$. Zumeist werden die Buchstaben f, g und h für Funktionen benutzt, man könnte die Funktion aber auch Paul nennen und Paul(x)=3x+5 schreiben.

Offenbar gibt es aber auch Funktionen, bei denen die Definitionsmenge nicht die reellen Zahlen sein können. Die Wurzelfunktion ist so eine Funktion: $f(x) = \sqrt{x}$ kann als größte Definitionsmenge höchstens die Menge der positiven Reellen Zahlen sowie 0 haben, da z.B. $\sqrt{-4}$ nicht definiert ist. Auch die Wertemenge sind hier die positiven Reellen Zahlen und 0.

Betrachten wir nun die <u>linearen Funktionen</u>. Dies sind Funktionen, deren Schaubild eine Gerade ist. Beispiele sind $f(x) = 3x+5$ oder $g(x) = -2x +7$. Allgemein schreiben wir: $f(x) = mx + c$. Dabei ist m die Steigung der Geraden und c der Schnittpunkt mit der y-Achse (siehe auch *Postel, S.56).*

→ Wiederhole, wie man aus dem Graphen einer linearen Funktion die Zuordnungsvorschrift gewinnt (*Postel S. 56)*.

Auch <u>quadratische Funktionen</u> wurden schon behandelt: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Das Schaubild einer solchen Funktion heißt Parabel (siehe *Postel, S. 70*).

→ Wiederhole die Begriffe „Normalparabel“, nach oben/unten geöffnete Parabel
→ Wiederhole: Streckung und Stauchung von Parabeln
→ Wiederhole: Berechnung eines Scheitelpunkts

Die Schnittpunkte eines Graphen mit der x-Achse bestimmt man durch Berechnung der <u>Nullstelle</u>. Eine lineare Funktion hat immer genau eine Nullstelle, eine quadratische Funktion hat bis zu zwei Nullstellen (möglicherweise auch gar keine). Um eine Nullstelle zu berechnen, setzt man den Funktionsterm gleich 0.

Als Beispiel berechnen wir die Nullstelle(n) von $f(x) = 5x + 15$ und $g(x) = 2x^2 + 6x - 8$.

$f(x) = 0$

$5x + 15 = 0$

$5x = -15$

$x = -3$

$g(x) = 0$

$2x^2 + 6x - 8 = 0$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$x_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$

$x_1 = 1$; $x_2 = -4$

Der Schnittpunkt mit der x-Achse ist also für die Funktion f der Punkt N(-3|0), bei der Funktion g gibt es zwei Schnittpunkte mit der x-Achse: N_1 (1|0) und N_2 (-4|0).

Überprüfe: Die Funktion $h(x) = 5x^2 + 10x + 30$ hat keine Nullstelle.

Wir betrachten nun die Funktion $j(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$. Ohne weitere Kenntnisse kann man die Nullstellen dieser Funktion nicht berechnen. Sie ist aber so ausgesucht, dass sie drei Nullstellen hat:

N_1 (1|0) , N_2 (-4|0), N_3 (-3|0) (dies sind genau die oben für die Funktionen f und g berechneten Nullstellen)

Wie kann ich diese Behauptung überprüfen?

Dazu muss man wissen, wie man generell prüft, ob ein einzelner Punkt zu einem Funktionsgraphen gehört. Die Überprüfung ist allerdings einfach: Man setzt den „x-Wert“ in die Funktion ein und schaut, ob der „y-Wert“ herauskommt. Für N_3 setzt man also für x den Wert -3 ein und hofft, dass 0 herauskommt:

$$(-3)^3 + 6 \cdot (-3)^2 + 5 \cdot (-3) - 12$$

Da dieser Term wirklich den Wert 0 hat, liegt (-3|0) auf dem Graphen von j.

Überprüfe auch die beiden anderen Punkte N_1 und N_2 und zeige, dass (2|27) nicht zum Graphen gehört.

Zum Knobeln: Wieso hat gerade die Funktion j genau die Nullstellen von f und g?

4. Themen der Oberstufe

Hier soll zunächst ein kleiner Überblick gegeben werden. Danach werden noch drei Themen genannt, auf die man sich mit Hilfe anderer Quellen (z.B. Internet) vorbereiten könnte. Dies ist allerdings nicht unbedingt notwendig, es soll nur die Möglichkeit bestehen, bei entsprechender Motivation weiterzuarbeiten.

In der Abiturprüfung muss man in zwei der folgenden drei Fächer eine schriftliche Prüfung machen:

Mathematik

Deutsch

Fremdsprache (zumeist Englisch)

Dies bedeutet, dass ein Abitur in Mathematik nur dann nicht geschrieben werden braucht, wenn man in Deutsch und Englisch (bzw. Französisch/Latein im sprachlichen Profil) geprüft wird. Grund genug also, sich ganz kurz mit der Oberstufenmathematik im Überblick zu beschäftigen.

Es gibt drei Oberthemen, die in jedem Schuljahr unterrichtet werden:

Analysis, Analytische Geometrie (Vektorrechnung), Stochastik (Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Das schriftliche Abitur besteht aus einem hilfsmittelfreien Teil (30 Punkte) und je einer Komplexaufgabe aus den Gebieten Analysis (40 Punkt) sowie Analytische Geometrie und Stochastik (je 25 Punkte).

Dieser Aufbau bedeutet: *Mit der ersten Mathematikstunde beginnt die Abiturvorbereitung!*

Auf den folgenden Seiten findest du noch Übungsaufgaben und Lösungen.

Aufgaben zu Kapitel 2

Aufgabe 1 In einer Urne sind 8 gelbe, 5 rote und 2 blaue Kugeln.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, keine blaue Kugel zu ziehen.

b) Man zieht nun dreimal ohne Zurücklegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man keine gelbe Kugel?

c) Man zieht nun zweimal ohne Zurücklegen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, zwei gleichfarbige Kugeln zu ziehen.

d) Jetzt soll mit Zurücklegen gezogen werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man bei drei Zügen drei blaue Kugeln?

Aufgabe 2 Beim Hunderennen treten Pluto, Hasso, Bello, Rocky und Rambo in drei Rennen gegeneinander an. Alle fünf Hunde sind in etwa gleich schnell. Der Sieger eines Rennens erhält 35€, der Zweite 10€ Preisgeld.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Pluto in drei Rennen kein Preisgeld?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt im ersten Rennen Bello vor Rambo oder Hasso?

c) Wie viele mögliche Kombinationen aus Sieger und Zweitem gibt es in einem einzelnen Rennen?

d) Das Startgeld beträgt 50€. Mit welcher Wahrscheinlichkeit machen ein Hund und sein Herrchen bei den drei Rennen keinen Verlust?

Aufgaben zu Kapitel 3

Aufgabe 1 Gegeben seien die Punkte P(-1|-3) und Q(-2|-12). Bestimme die Gleichung der Geraden, die durch diese beiden Punkte verläuft.

Aufgabe 2 Der Graph der in Aufgabe 1 gewonnenen Funktion schneidet den Graphen der Funktion $g(x)=4x^2+8x+1$. Bestimme die Schnittpunkte beider Graphen.

Lösungen Kapitel 1

Aufgabe 1 a) 9ab-38a+30b+10 b) $8x^2-xy+2y^2$

Aufgabe 2 a) 3x(y+3-4yz) b) 4b(2a+1-4a)

Aufgabe 3 a) x=5 b) x=1,5 c) x=-5 d) x=1

Aufgabe 4 a) $x_1=-1$ $x_2=-7$ b) x=5 c) $x_1=2$ $x_2=9$ d) keine Lösung e) $x_1=1{,}7$ $x_2=-5$

Aufgabe 5 a) x=3 ; y=-9 b) x=-1 ; y=5

Aufgabe 6: 5253,13€ Aufgabe 7: A≈12,57m² ; u≈12,57m Aufgabe 8: a) $2x^5$ b) $5x^2$

Lösungen Kapitel 2

Die meisten Aufgaben sind auch mit einem Wahrscheinlichkeitsbaum zu lösen.

Aufgabe 1

a) Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{13}{15}$.

b) p(„keine gelbe Kugel“) = $\frac{7}{15}\cdot\frac{6}{14}\cdot\frac{5}{13}=\frac{1}{3}$ (noch sicher in Bruchrechnung? Wenn nicht: Wiederholen!)

Erklärung: Beim ersten Zug sind 15 Kugeln in der Urne, 7 davon „nicht gelb“. Danach sind noch 6 nicht gelbe Kugeln von insgesamt 14 in der Urne und beim Ziehen der letzten Kugel noch 5 nicht gelbe von insgesamt 13 Kugeln. Es spielt dabei keine Rolle, ob die Kugeln gleichzeitig oder hintereinander gezogen werden.

c) p(„zwei rote Kugeln“)=$\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}=\frac{2}{21}$; p(„zwei gelbe Kugeln“)=$\frac{8}{15}\cdot\frac{7}{14}=\frac{4}{15}$; p(„zwei blaue Kugeln“)=$\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{14}=\frac{1}{105}$

p(„zwei gleichfarbige Kugeln“) = $\frac{2}{21}+\frac{4}{15}+\frac{1}{105}=\frac{13}{35}$

d) p(„drei blaue Kugeln“)=$\frac{2}{15}\cdot\frac{2}{15}\cdot\frac{2}{15}=\frac{6}{3375}\approx 0{,}00178=0{,}178\%$

Aufgabe 2

a) p(„kein Geld für Pluto“)=$\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{125}$

b) p(„Bello siegt vor Hasso oder Rambo“)=$\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{10}$

c) Es gibt 5 · 4 = 20 Möglichkeiten.

d) p(„min. 2 Siege“)=$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$; p(„1 Sieg, 2 mal 2.“)= $3\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{125}$

→ p(„kein Verlust“)=$\frac{1}{25}+\frac{3}{125}=\frac{8}{125}$

Lösung Kapitel 3

Aufgabe 1 y = 9x + 6

Aufgabe 2 $S_1(-1|-3)$ und $S_2(\frac{5}{4} \mid \frac{69}{4})$